



TITLE:

液体ヘリウムIIの中を電場の作用を
うけて運動する荷電粒子-渦輪系の
構造(多体問題研究会(第一回)の報
告)

AUTHOR(S):

永原, 律子

CITATION:

永原, 律子. 液体ヘリウムIIの中を電場の作用をうけて運動する荷電粒子-渦輪系の構造(多体問題研究会(第一回)の報告). 物性研究 1966, 7(2): 171-180

ISSUE DATE:

1966-11-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/85946>

RIGHT:

液体ヘリウム II の中を電場の作用を受けて 運動する荷電粒子—渦輪系の構造

氷 原 律 子 (都立大理)

(10月17日受理)

この論文は物性研究 41 年 6 月号に、超流動超伝導研究会の報告の項にノートしたものを発展させ詳論したものである。渦輪が吹き流しの形になつて長さが a になつたときの変形エネルギーを ka と表わしたが、 a に比例するものとしては表面エネルギーが考えられる。 λ 点以下で密度と表面張力が温度に大きく依存しないことを利用して、荷電粒子、渦輪、電場の相互作用を考察し、荷電粒子の速さが電場から得るエネルギーに逆比例することを示した。Reif 達の実験 data とも矛盾しない。

§ 1 序

絶対零度に近いところでの液体ヘリウム II は量子効果の現われる量子液体であり、また分子の熱運動によるエネルギー拡散を無視できる理想流体とみなせる。

Reif 達は 0.28°K の液体ヘリウム II の中で荷電粒子を電場で加速して、その運動を測定した。電場の強さが増加すると、すなわち、荷電粒子が電場から得るエネルギーが増加すると、荷電粒子の速度が減少する結果が出た。(ref.1 Fig.1)

その機構について Reif は渦輪をなしている、core の中を荷電粒子が輪にそつて熱運動で回転し、core に電荷が一様に分布しているとみなし、電場は core の各部分に一様な力を及ぼし、生じたマグナス力によつて渦輪の直径がひろがり、その結果、荷電粒子の速度が減少すると論じている。(ref.2)

ref.1. G.W.Rayfield and Reif. Phys. Rev. 136A 1194 (1964)

ref.2. Reif, Low Temperature Physics LT9, 46 (1964)

水原律子

しかし古典流体との類推によれば、荷電粒子がある速度にまで加速されるとうしろに渦輪の wake を生じ、荷電粒子は、渦輪と電場の両方の作用をうけると考えられる。

ここでは Reif とは異なる、古典流体に外挿しても矛盾のない新しいモデルで荷電粒子-渦輪系を考察する。レイノルズ数の大きい流体では、物体の後の渦輪の半径は大きくならず wake が長くなる。これとの類推から、荷電粒子によつて生じた渦輪は、粒子によつて進行方向にひきのばされ、半径は変化しないままで吹き流しの形になる。この変形に当つて渦輪の量子化された循環は保存されるので渦輪の速度は変形に応じておそくなる。2 節参照。

荷電粒子の運動中エネルギーの損失はないので、荷電粒子が電場から得るエネルギーは荷電粒子-渦輪系のエネルギーになる。このエネルギーは渦輪の変形による core の表面エネルギーの増加になる。結果として、荷電粒子が、電場から得るエネルギーが増加すれば、core の表面エネルギーが増加し、変形も大きくなり、従つて渦輪の速度は減少し、渦輪に束縛されている荷電粒子は

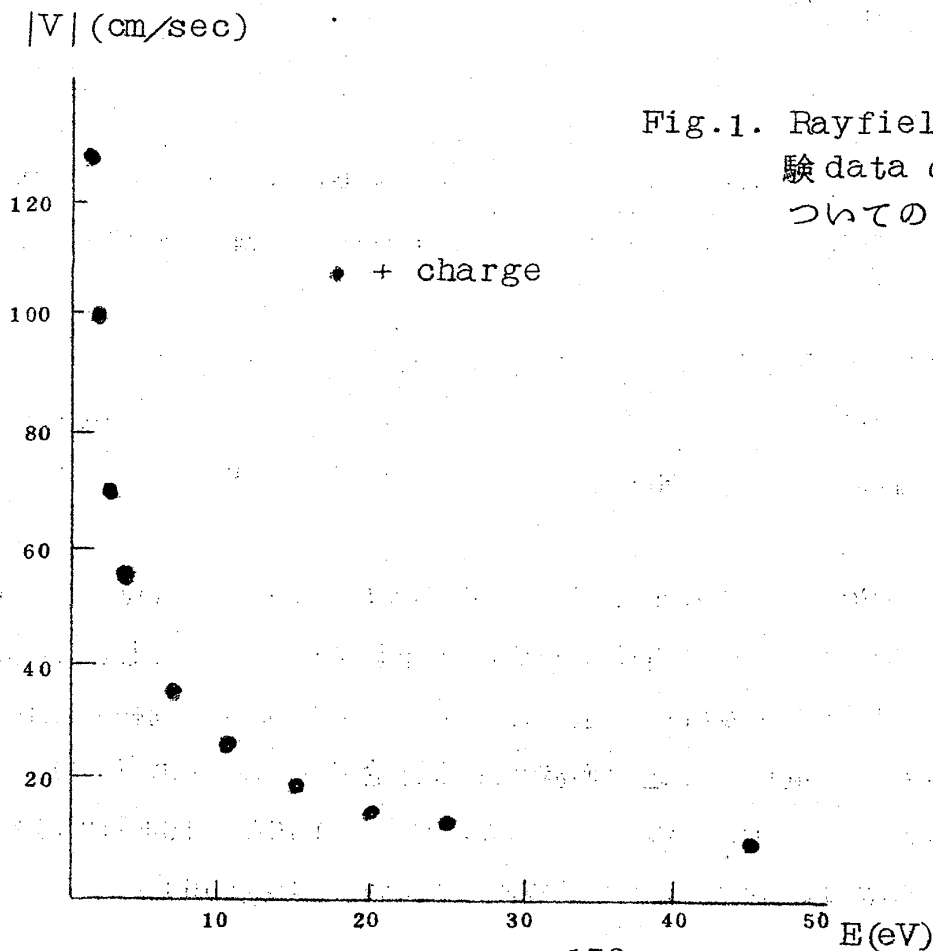


Fig.1. Rayfield と Reif の実験 data の内正荷電粒子についての data.

減速する。この機構を3節で示す。

なお量子流体としての性質は、量子化された循環の形で現われ、それ以外は古典的理想流体として扱われる。

§ 2 変形した渦輪の速度

渦輪の core が荷電粒子によつて進行方向に引きのばされて変形し、渦輪が吹き流しの形になつたときの渦輪の固有の速度を求める。

簡単のため、渦輪の中心軸を含む断面をとつて二次元の渦対で考察する。流れは、粒子の中心および渦輪の中心を通る軸について対称であるから、この簡単化は許される。

はじめに、一本の渦糸の断面の中心を複素平面の原点にとり、複素変数を $z = x + iy = re^{i\theta}$, ヘリウム原子の質量を m , プランク定数を h とすると、量子化された循環の単位は $K = h/m$ となり、量子数 1 の循環をもつ渦糸の複素ポテンシャルは

$$\begin{aligned} w &= \frac{K}{2\pi i} \log z \\ &= \frac{K}{2\pi i} (\log r + i\theta) \end{aligned}$$

となる。この渦糸による速度は

$$\frac{\partial w}{\partial z} = U + iv$$

$$= \frac{K}{i2\pi z}$$

で表わせる。

渦輪が生成したばかりのとき、core はまだ変形していないし、速度は荷電粒子の速度に一致しているとみなせるので、自由渦輪の考察が可能である。

渦輪の断面をとつて、変形しない core をもつ渦対を考えると、その間隔 $2R$ (渦輪の直径) は次のようにして求まる。 z 平面の原点にある一つの渦糸ともう一つの $z = i2R$ に中心のある渦糸とが互に及ぼしあう速度は、 $z = 0$ にあ

水原律子

る渦糸による、 $z=i2R$ の点の速度に等しい。

すなわち、

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)_{z=i2R} = \frac{K}{i2\pi z} = \frac{-K}{4\pi R}$$

となる。

Reif 達の実験では渦輪ができるときの荷電粒子の速度は明らかでないが、Careri 達の温度 0.889°K での実験で荷電粒子の速度が V_C の整数倍ごとに不連続に変化することから、まず、 V_C の速度で渦輪の生成があるとみなせる。(ref 3)。 $T=0.889^\circ\text{K}$ では渦輪—荷電粒子の結合の安定性が悪く、分離し粒子のほうは自由粒子としてふたたび加速されるとけなされる。

生成したばかりのときの渦輪の速度を荷電粒子の平均速度に等しいとみなして、Careri 達の data によつて正荷電粒子に対して $|V_C| \cong 5 \text{ m/sec}$ とすると

$$R = \frac{K}{4\pi |V_C|} = 15.8 \times 10^{-8} \text{ (cm)}$$

ただし、 $K=h/m=0.997 \times 10^{-3} \text{ (cm}^2/\text{sec)}$ 。この R が正荷電粒子によつて作られた渦輪の半径である。

荷電粒子の半径と渦輪の半径はつねに同程度で、粒子は渦輪の core の表面に接しているとする。荷電粒子の密度は core の表面領域の密度より大きいことは予想できるから、荷電粒子—渦輪の結合力は全表面張力より大きいとみなしてよい。ここでいう全表面張力とは、荷電粒子の進行方向に core の表面を引きのばすときに働く張力のことで、 k で表わすと、正荷電粒子に対して、液体ヘリウムの表面張力係数 $\tau \cong 0.36 \text{ (dyne/cm)}$ を使つて

$$k = 4\pi R\tau = 4.45 \times 10^5 \text{ (eV/cm)}$$

表面張力係数 τ は、 1 点以下ではほとんど温度の影響を受けないものとみなし

ref. 3 G.Careri, S.Cunsolo and P.Mazzoldi, Phy.Rev.136A303

てよい。

これにくらべて、Reif 達の実験では、荷電粒子に働く電場の力は大きいところ

$$F = eE = 150 \text{ (eV/cm)}$$

くらいであるから、実験中つねに

$$eE \ll k$$

がいえる。これによつて、電場の作用に対して結合力および表面張力が十分大きいので、荷電粒子—渦輪系が安定なことがわかる。したがつて、荷電粒子が渦輪の速度以上に加速されると渦輪の core は変形し、進行方向にのびる。

渦輪の進行方向、すなわち、core の長径方向を x 軸の負の方向にとり、長径の後端の一つを原点にとる。長径の長さが A になつたときにも循環 K は保存するので、core の長径の上に K/A なる循環密度で一様に分布するものとみなす。この仮定は、カルマンの vortex street に相当するものだが、street の長さは有限、全循環の和が保存し、循環は連続的に分布しているものとみなす。

長径の長さが A になつたとき、一方の (x 軸上にある) 渦にある複素ポテンシャルは

$$\begin{aligned} w &= \frac{K}{i2\pi A} \int_{-A}^0 \log(z-x) dx \\ &= \frac{K}{i2\pi A} [(z+A) \log(z+A) - z \log z - A] \end{aligned}$$

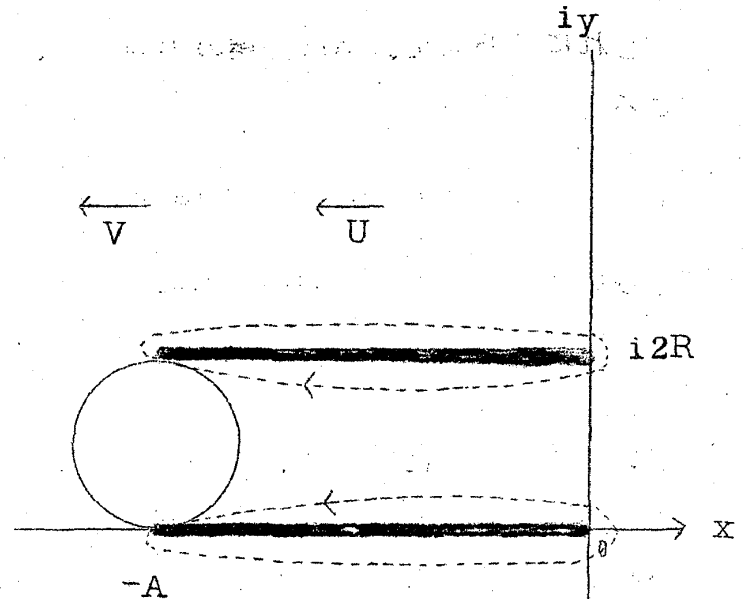
複素速度は

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= U - iV \\ &= \frac{K}{i2\pi A} \log\left(\frac{z+A}{z}\right) \end{aligned}$$

となる。

水原律子

Fig. 2 理想的に変形した渦輪の断面図。 \vec{U} , \vec{V} はそれぞれ粒子、渦輪の速度を表わす。■はcoreの断面、---線はそのまわりの流線と流れの方向を示す。



渦輪が荷電粒子に束縛されていないときは、吹き流しの形自身が不安定で、先端では半径が大きくなって減速し、後端では半径が小さくなって進行方向の速度を増し、輪の中を抜け出て前方に出、そこでふたたび

半径が大きくなるという運動をくりかえす。しかし、いまの場合、先端は粒子に束縛されているため、半径が大きくなって減速することはない。また、荷電粒子に生じる鏡像の影響もあつて、後端はある程度小さくなつても、平衡を保つと考えられる。したがつて、渦輪自身の速度はcoreの長径の中心部、 $z = -\frac{A}{2} + i2R$ 、および $z = -\frac{A}{2}$ の点の速度で平均的な運動を表わせるとみなしてよい。すなわち、渦輪の半径を R とすれば、断面をとつた細長い渦対は、相互作用とともに次の速さで運動する。

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z = -\frac{A}{2} + i2R} \\ &= \frac{K}{i2\pi A} \log e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} \\ &= \frac{-K}{2\pi A} (\pi - 2\theta_1) \end{aligned}$$

ただし、

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{4R}{A} \right), \quad \theta_2 = \tan^{-1} \left(-\frac{4R}{A} \right) = \pi - \theta_1$$

渦輪ができたばかりのとき、 A は 0 に近いので、

$$\lim_{A \rightarrow 0} \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{4R}$$

速さは

$$|U| = \lim_{A \rightarrow 0} \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| = \frac{K}{4\pi R}$$

で変形のないときの速さを表わす。

§ 3 系の構造及び荷電粒子の速度

荷電粒子が電場の中を距離 L cm 動いて得るエネルギーは、電場の強さを E volt/cm とすると

$$\epsilon = eEL \quad (\text{eV})$$

これは渦輪生成までに要したエネルギー ϵ_0 と渦輪の core の変形による表面エネルギーの増加 kA になる。すなわち

$$\epsilon = \epsilon_0 + kA$$

渦輪の core に束縛された荷電粒子の速度を V とすると、単位時間に得るエネルギーが、そのまま渦輪のエネルギーになるので

$$eEV = k \frac{dA}{dt}$$

荷電粒子と渦輪の結合は安定だから、両者の相対速度に応じて core の進行方向の直径がのびる。すなわち

$$V - U = \frac{dA}{dt}$$

U は渦輪の速度 $\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{A}{2} + i\frac{1}{2}R$ 。上の二つの式から荷電粒子の速度が求まる。

$$V = U / \left(1 - \frac{eE}{k} \right)$$

ここで、 $k \gg eE$ であるから、 eE/k の項は無視できて

水原 律子

$$V \cong U \\ = \frac{-K}{2\pi A} [\pi - 2\theta_1]$$

ここで、 $A = (\epsilon - \epsilon_0)/k$ だから

$$V = \frac{-Kk}{2\pi(\epsilon - \epsilon_0)} [\pi - 2\theta_1]$$

となり、 ϵ_0 の値が必要となる。

できたばかりの渦輪を形成している core の有効半径を a とすると、core の有効表面での流速は

$$|v| = \frac{K}{2\pi a}$$

流速による圧力の低下は core の表面での表面張力とつりありと考える。表面張力係数 r による圧力 P は、面の曲率半径の小さいものだけをとる近似で

$$P = \frac{r}{a}$$

これが流速による圧力低下に等しいので

$$\frac{1}{2} \rho |v|^2 = \frac{r}{a}$$

ここで、 ρ は液体ヘリウムの密度 $\rho = 0.145 \text{ g/cm}^3$ 。ゆえに

$$a = \frac{\rho K^2}{8\pi^2 r} \cong 0.52 \text{ \AA}$$

となり、core の有効半径が求まる。

できたばかりの渦輪のエネルギーは表面エネルギー ϵ_1 に等しいとすると、いまの場合

$$\epsilon_1 = 2\pi a \times 2\pi R \times r \\ \cong 7.1 \times 10^{-3} \text{ (eV)}$$

つぎに、渦輪つくるときまでに、荷電粒子が得る運動エネルギー ϵ_2 を求める。荷電粒子の大きさが渦輪の大きさの程度で半径 15.8 \AA であることから、有効

質量はかなり大きくなり、静止ヘリウムと同じ密度のかたまりであるとして、質量は $\rho \frac{4}{3} \pi R^3$ になる。

ゆえに

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &= \frac{1}{2} \left(\rho \frac{4}{3} \pi R^3 \right) |v_c|^2 \\ &\cong 1.9 \times 10^{-4} \quad (\text{eV})\end{aligned}$$

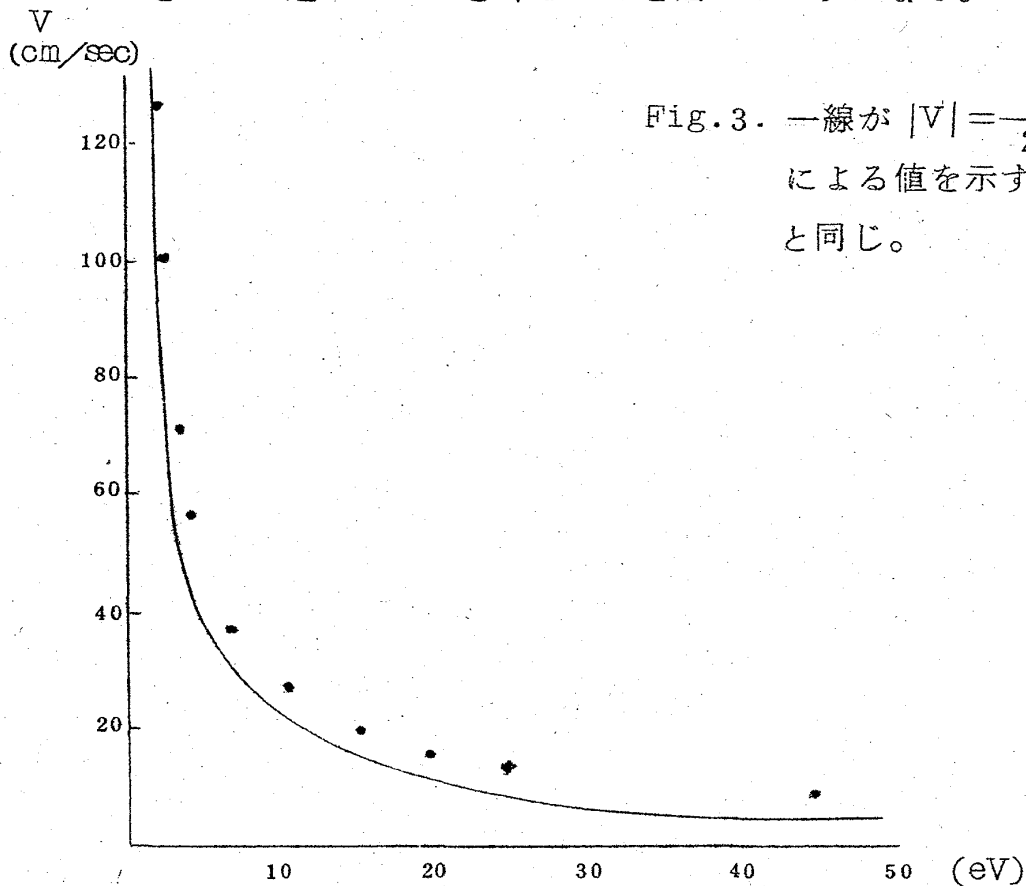
ただし、 v_c は渦輪ができるときの粒子の速度で 5m/sec。この ϵ_1 と ϵ_2 の和 ϵ_0 が渦輪生成に必要なエネルギーであるが、Reif の実験では、約 3eV から 50eV 程度までの実験であるから ϵ_0 を無視してかまわない。

ゆえに、荷電粒子の速度は

$$\begin{aligned}V &\cong U \\ &= \frac{-Kk}{2\pi\epsilon} [\pi - 2\theta_1]\end{aligned}$$

となる。

これを Reif 達の data とくらべると図 3 のようになる。



水原律子

§4

実験 data とのずれは、一般的な原因として、

- ① 渦輪を二次元の渦対で考察したこと。
- ② A が長くなつたときの不安定性を無視したこと。
- ③ 初期の輪の大きさや速度が確定的でないこと。

などが考えられる、しかし、かなりあらい近似にもかかわらず実験値に近い結果を得ることができたことは、渦輪が吹き流しの形になって荷電粒子に引きずられながら、粒子を減速し、渦輪自身は引きのばされて、表面エネルギーを吸収して行く機構が正しいものだからと思える。これによつて Reif の charged core の不自然さを避けることができる。